**Дискретная математика**

1. 1)Множество- это многое, рассматриваемое как одно целое. Обозначается одной буквой.

2)Характеристическая функция- характеристической функцией множеста X ⊆ U называется функция, определяемая следующим образом

Очевидно, что функции и совпадают тогда и

только тогда, когда совпадают множества X и Y .

3) Задания множеств:

**Перечисление.**В случае бесконечного множества можно использовать рекурсивное задание множества, когда множество задается перечисляющей процедурой.

**Описание.**

P (x) — утверждение, заключающееся в том, что элемент x обладает свойством P . Тогда запись

означает, что рассматривается множество всех элементов x, обладающих свойством P .

4) Парадокс Б. Рассела  
Пусть M — множество всех множеств. Тогда очевидно, что M ∈ M. Тем самым, существуют множества, содержащие себя как свой элемент.

Рассмотрим некоторое множество X, которое не содержит себя как свой элемент. Пусть Y — множество всех таких множеств X, т. е. множество всех множеств, не содержащих себя как свой элемент.

Зададимся вопросом: каково множество Y ? Содержит оно себя как элемент или нет? Возможны два случая: 1) содержит; 2) не содержит.

В первом случае Y ∈ Y . Тогда по определению множества Y имеем Y ∉ Y. Получили противоречие. Во втором случае Y∉Y . Тогда по определению множества Y имеем Y ∈ Y. Получили также противоречие.

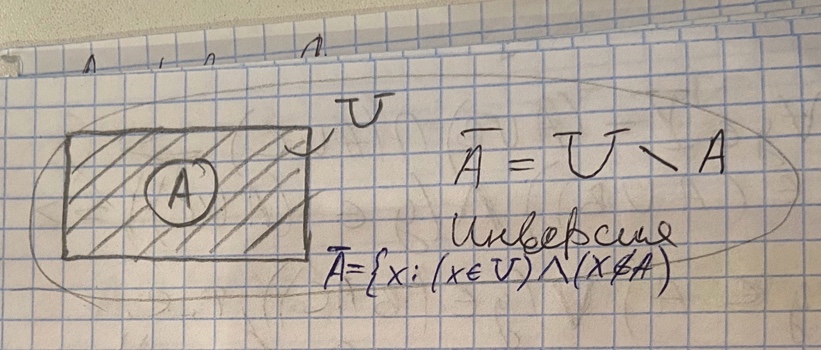
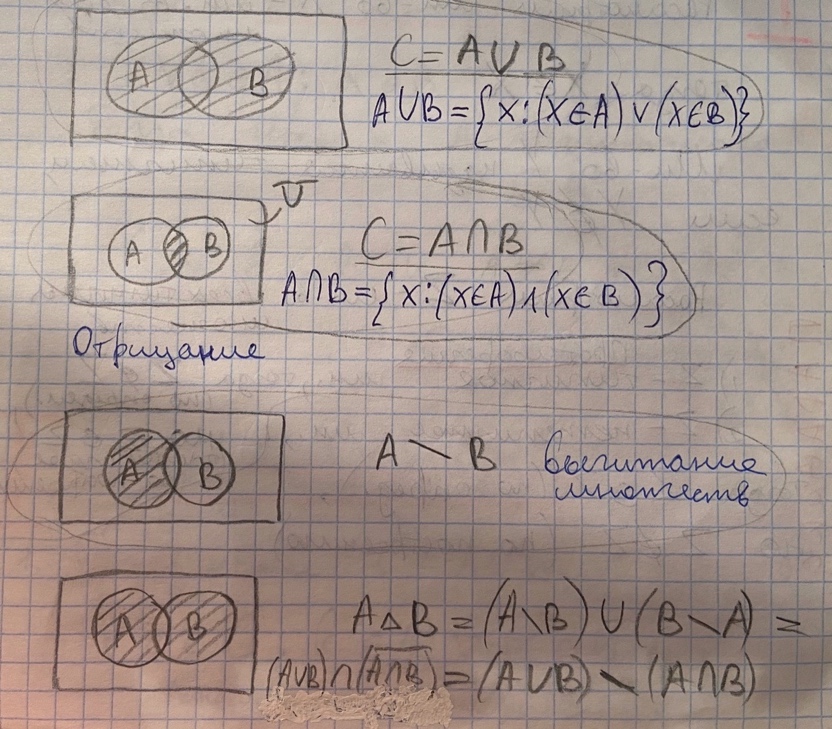
1. **1)** Операции над множествами

**Объединение** двух множеств X и Y– это множество, обозначаемое и состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств X или Y. ∀с C : (cv(c

**Пересечение** множеств X и Y– это множество, обозначаемое и состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств X или Y.

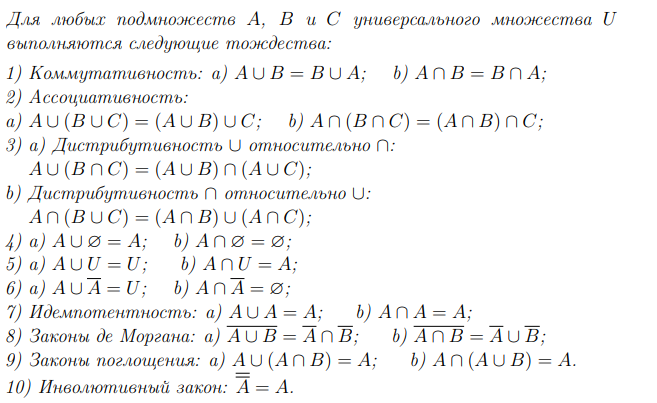
∀с C : (c Ʌ(c

**Разностью** множеств X и Y называется множество, обозначаемое и состоящее из всех элементов X, не принадлежащих Y .

**2)** Диаграмма Венна  


**3) Симметричной разностью** - множеств X и Y называется множество

3. 1)Свойства (законы) операций над множествами



4 – свойство нуля; 5 – свойство единицы; 6 – свойство дополнения

2) Доказательство закона де Моргана

*ч.т.д*

1. 1)Декартово произведение множеств.  
   Декартовым произведением множеств

обозначаемым называется множество всех упорядоченных наборов , где

X = {1,2,3},Y = {1,2,3,4} - два множества. X Y явля-

ется множество пар Z = {(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;1),...,(3;4)}.

2) Степень множества

Если множества совпадают с множеством X , то их декартово произведение называется степенью множества X и обозначается .

AxA={(a, ã) : (a A) (ã A)}

**5**. 1) Отображение множеств.

Пусть X и Y два непустых множества.

Отображением (множества X во множество Y) или функцией

f : X Y называется тройка <X, Y, f>. Здесь X , Y – два непустых множества,

f - правило, сопоставляющее каждому элементу x X однозначно определенный элемент y = f ( x) Y. Множество X называется областью определения

отображения. Элемент x X называется аргументом отображения f , элемент

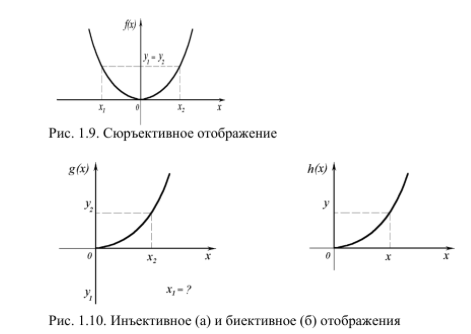
f (x) называется образом элемента x при отображении f . При этом пишут x f (x). Часто, в случае, когда множество Y – числовое, а X – не числовое, отображение называют функционалом.

2) Отображение f : X Y называется **сюръективным**, если f ( X ) = Y , т.е. для

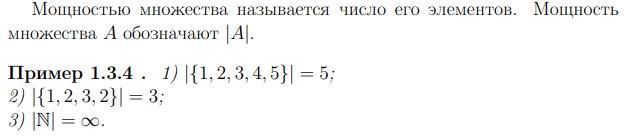
каждого элемента из Y есть прообраз.

3) Отображение f : X o Y называется **инъективным**, если из f (x) = f () следует, что x = , т.е.для каждого элемента Y имеется не более одного прообраза .

4) Отображение f : XY называется **биективным** или взаимно однозначным, если это отображение одновременно и сюръективно и инъективно, т.е. это отображение «на» и каждый элемент множества Y имеет ровно один прообраз.



1. 1) Мощность множества



Два множества называются эквивалентными по мощности, если существует

биективное отображение одного из них на другое. В этом случае пишут: X Y или | X |=| Y | и говорят, что множества X, Y имеют равные мощности.

2) Конечные и счетные множества.

Обозначим множество n первых натуральных чисел через = {1,2,..., n}.

Множеcтво X называется **конечным**, если оно эквивалентно при некотором n.

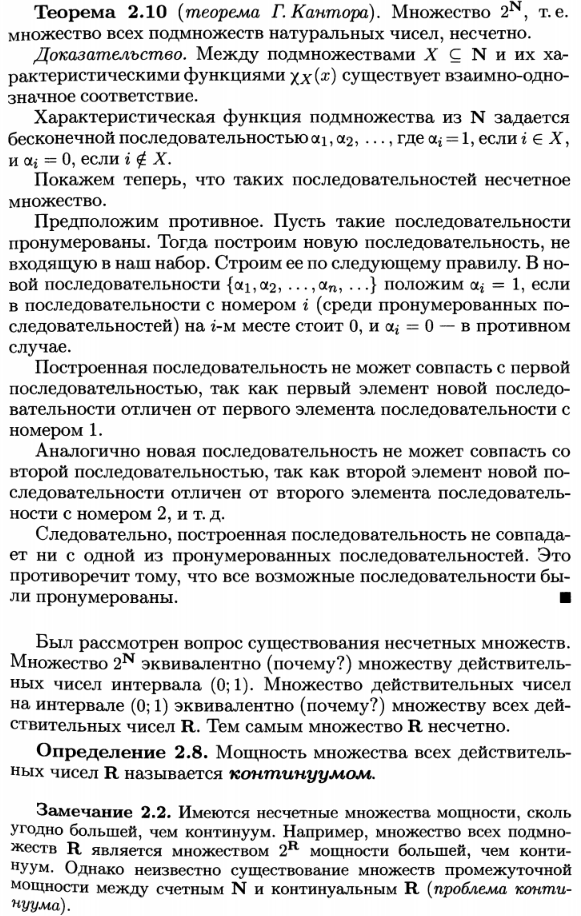
Число n называется количеством или числом элементов множества X . Для конечного множества X через | X | обозначим число элементов этого множества, т.е. | X |= n. Множества, не являющиеся конечными, называются *бесконечными.*

Множество называется **счетным**, если оно эквивалентно по мощности

множеству N. Счетные множества являются в некотором смысле наименьшими из

всех бесконечных множеств.

3) Теорема Кантора о континуальном множестве.

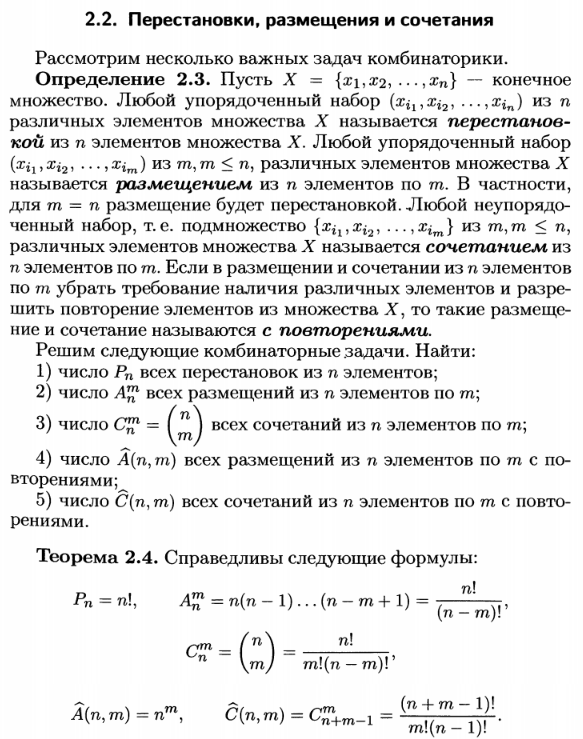


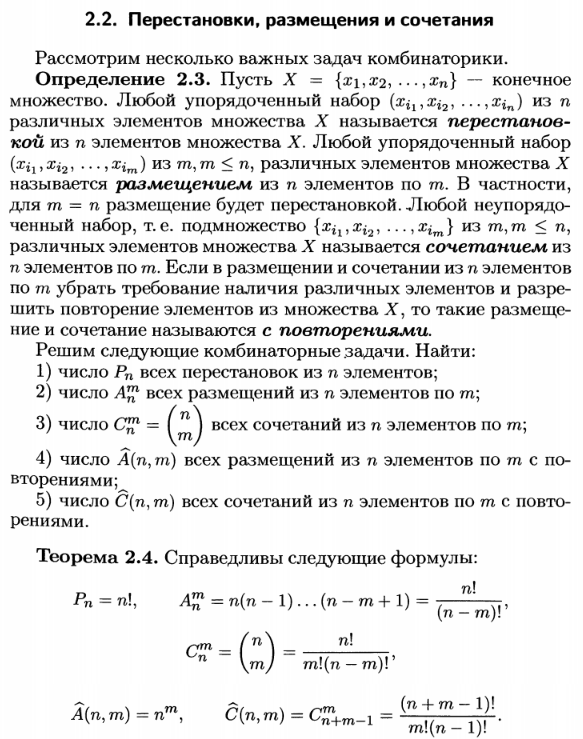
**7**. 1) Комбинаторикой называется раздел математики, изучающий способы

подсчета числа элементов в конечных множествах.

2) Теорема о формулах перестановок, размещений, сочетаний.

Теорема:





размещение

сочетание

1. 1) Мощность булеана конечного множества.

**Степень множества** (или же Булеан) – это множество всех подмножеств данного множества A. Обозначается как .

Справедливо следующее утверждение: число подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 

2) Мощность множества всех биекций конечного множества на себя.

Пусть X – конечное множество. Тогда | |= . Тем самым число характери-

стических функций подмножеств из n элементов равно .

Доказательство: Поскольку существует биективное соответствие между подмножествами и характеристическими функциями подмножеств данного множества,

достаточно доказать последнее утверждение теоремы. Можно считать,что X = . Тогда характеристической функции подмножества A однозначно ставится в соответствие n -мерный вектор (, координаты которого являются элементами множества {0,1}. При этом = 1, если i A, и = 0 в противном случае.

Число таких векторов, в силу теоремы 2, равно , так как мощность

множества {0,1} равна 2, число таких множеств (координат векторов) равно n .

Что и требовалось доказать.

**9**. Теоремы о сумме

Пусть – конечные попарно непересекающиеся множества, т.е

Тогда

Доказательство: Докажем теорему методом математической индукции. Базис

Индукции. Пусть n=2. Тогда обозначим

Пусть |X| = и |Y|= , Ввиду X зададим биекцию

ƒ: X; ƒ(i)=x(i), i=1, … ƒ(=y(j), j=1, …,.

Это означает, что

Теперь проведем индуктивный переход. Пусть теорема верна для n.

Тогда:

Изображение выглядит как объект

Автоматически созданное описание

Что и требовалось доказать.

Теорема о произведении

Пусть заданы конечные множества . Тогда т.е. число элементов декартова произведения множеств равно

произведению количеств элементов сомножителей.

т.е. число элементов декартова произведения множеств равно произ-

ведению количеств элементов сомножителей.

Доказательство: Будем доказывать теорему методом математической индукции. Базис индукции. Пусть n = 2. В этом случае все элементы множества ,

т.е. упорядоченные пары (), можно расположить в виде прямоугольной

таблицы со строками – элементами и столбцами – элементами .

В этой таблице, очевидно, будет | || | элементов.

Индуктивный переход. Предположим справедливость утверждения теоремы для n. Покажем, что для n+1 оно будет тоже справедливо. В самом деле,

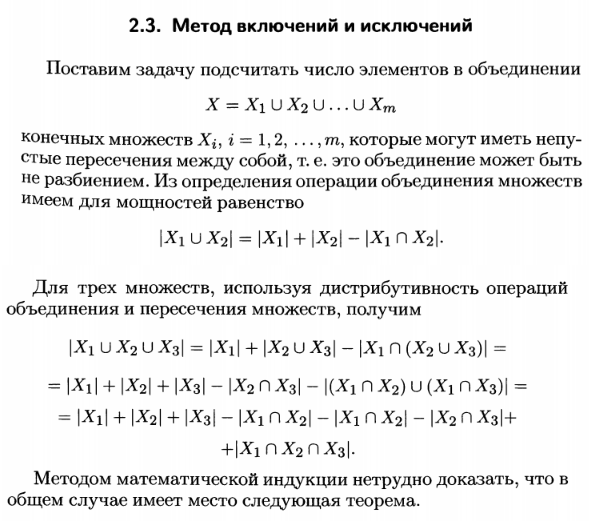
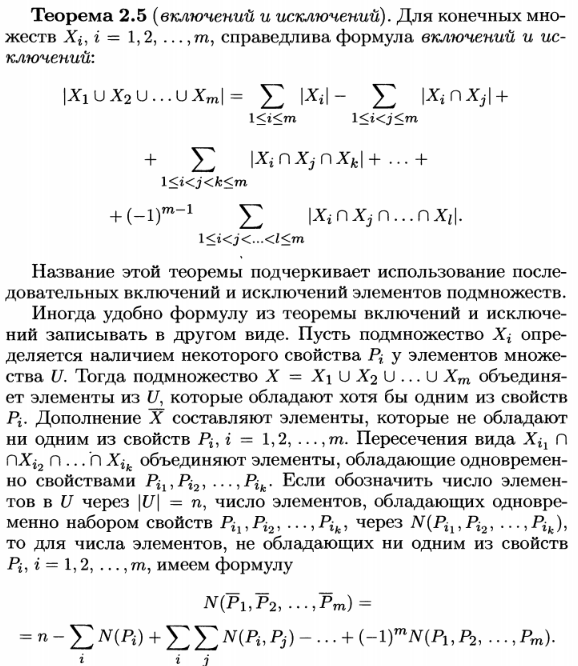
добавляя еще одно множество в декартово произведение, видим, что

| |= |(…=

=| .

Теорема доказана.

Теорема о включении и исключении множеств



Теорема о степени множеств

10. 1) Многоместные отношения

Множество упорядоченных n - ок называется

n -МЕСТНЫМ ОТНОШЕНИЕМ R для, т.е. R .

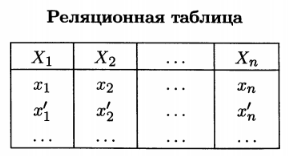
Многоместные отношения удобно задавать при помощи РЕЛЯЦИОННЫХ

ТАБЛИЦ. Такое задание соответствует перечислению множества

n - ок отношения R . При этом имена множеств называют **атрибутами**

(свойствами), а элементы называют **доменами** (значениями) атрибутов.

2) Реляционная таблица



11. 1) Бинарное отношение эквивалентности на одном множестве.

Бинарное отношение R называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение эквивалентности xRy часто обозначается xy.

Пример: Отношение «одного роста» есть отношение эквивалентности на

множестве X людей.

2) Теорема о разложение множества на классы эквивалентных.

Всякое отношение эквивалентности R определяет разбиение множества X на классы эквивалентности относительно этого отношения R.

Доказательство: тк Следовательно, каждый элемент множества X принадлежит некоторому классу эквивалентности.

Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

В самом деле, если z [x] и z [y], то xRz, следовательно, [ x] = [ z] . Далее имеем yRz и, следовательно, [y] = [z]. А отсюда [x] = [y].

Что и требовалось доказать.

3) Фактор множество по бинарному отношению эквивалентности.

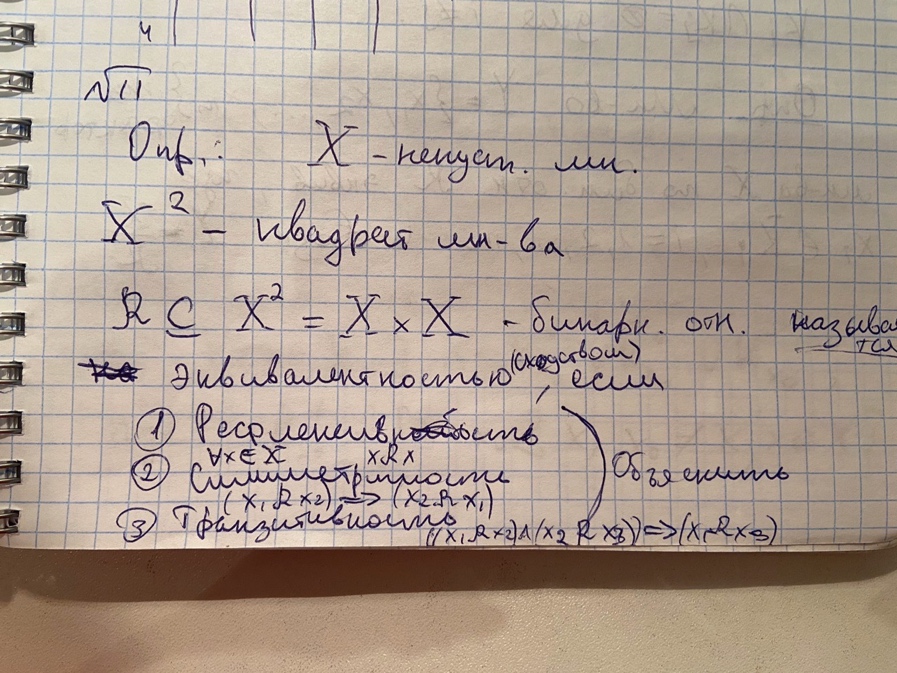
Совокупность классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности R называется ФАКТОР-МНОЖЕСТВОМ множества X по отношению R и обозначается X / R.

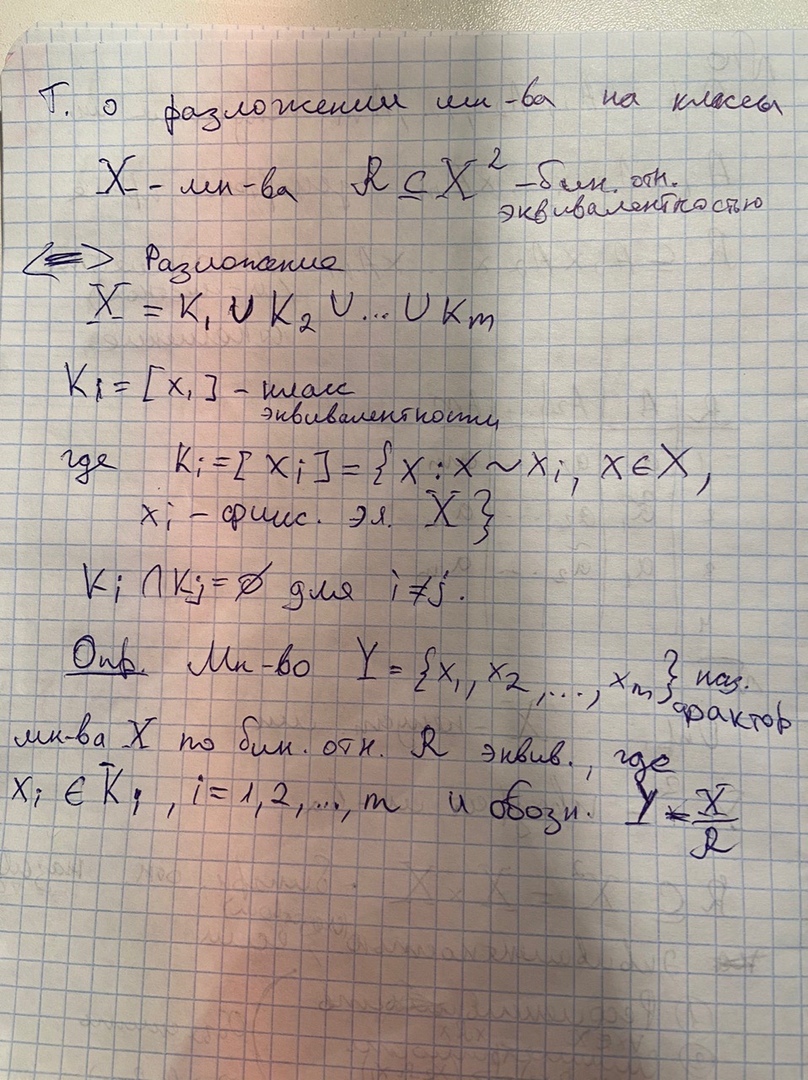
Пример: Рассмотрим RR– плоскость XOY . Элементы XOY - точки M ( x; y ). Пусть бинарное отношение P={<, >: = },т.е., тогда и только тогда,

когда =, где (;); (;) (совпадают первые координаты).

Такое отношение симметрично (если у и совпадают первые координаты, то у и тоже совпадают). Это отношение рефлексивно и транзитивно (если у и совпадают первые координаты и у и совпадают первые координаты, то у и первые координаты тоже совпадают). Таким образом это отношение эквивалентности.

Класс эквивалентности [M] - все точки, эквивалентные данной, т.е.все точки, имеющие одинаковую первую координату. На плоскости это вертикальные прямые. Таким образом, **фактор-множество** множества по отношению P т.е множество P , есть множество всех вертикальных прямых, что соответствует (биективно) оси 0X.





12. 1) Бинарное отношение порядка на одном множестве.

Бинарное отношение рефлексивное, антисимметричное и транзитивное называется

**отношением порядка** на множестве X и обозначается символом Изображение выглядит как музыка, объект, инструмент, мебель

Автоматически созданное описание с очень низким доверительным уровнем.

Пример: Отношение x ≤ y на множестве R есть отношение порядка.

Отношение порядка на множестве X , для которого любые два элемента сравнимы, т.е. для имеем xИзображение выглядит как музыка, объект, инструмент, мебель

Автоматически созданное описание с очень низким доверительным уровнем y или yИзображение выглядит как музыка, объект, инструмент, мебель

Автоматически созданное описание с очень низким доверительным уровнемx, называется **отношением линейного порядка.** Если во множестве X есть пары элементов, несравнимых между собой, то отношение порядка называется **частичным порядком**.

2) Теорема о разложении упорядоченного множества в любой точке на три конуса.

Всякое множество X c отношением порядка R для каждого своего элемента a X разбивается на три непересекающихся класса (конуса):

X = ,

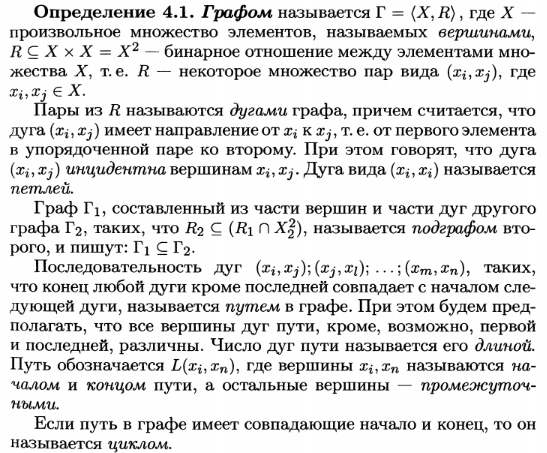
где = {x : xX , aИзображение выглядит как музыка, объект, инструмент, мебель

Автоматически созданное описание с очень низким доверительным уровнем x, a ≠ x} – класс (конус) всех строго превосходящих **a** элементов множества X , = {x : xX , aИзображение выглядит как музыка, объект, инструмент, мебель

Автоматически созданное описание с очень низким доверительным уровнем x } – класс (конус) всех не превосходящих **a** элементов { x : xX, x–несравнимa } – класс (конус) всех несравнимых с **a**

элементов из X . Некоторые из классов могут быть пустыми.

**13**. 1) Графы как бинарные отношения на одном множестве.



2)Ориентированный и симметричный графы.

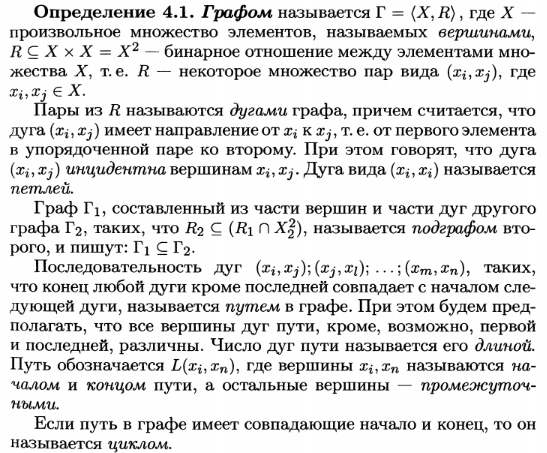
Граф Г =< X , R >, у которого бинарное отношение R – симметричное, называется **симметричным** (неориентированным).

Все остальные графы называются **несимметричным**(ориентированными)

Симметричные графы:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

3) Путь в графе. Петля и цикл



4) Матрица смежности.

Матрица смежности **A** описывает все одношаговые пути в графе. Матрица описывает все двухшаговые пути и т.д., матрица описывает все (n-1)- шаговые пути.

**Матричный** способ задания графа. Граф можно задавать с помощью матрицы A

бинарного отношения, которая называется **Матрицей смежности**. Составим квадратную матрицу, число строк и число столбцов котоой равно n, где n – число вершин графа.

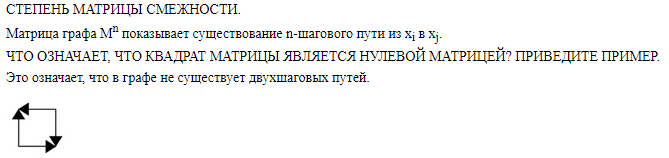
Каждой строке и каждому столбцу сопоставим номер вершины графа. Элементы матрицы положим равными 1, если в графе имеется дуга , и 0, если такой дуги нет.

Примеры:

|  |  |
| --- | --- |
| Рис 4.2  Изображение выглядит как электроника  Автоматически созданное описание | Рис 4.3  Изображение выглядит как электроника  Автоматически созданное описание |

В данном графе нет «петель», все

5) Степень матрицы смежности. ) Что означает, что квадрат матрицы смежности графа является нулевой матрицей?



**14**. 1) Эйлеров и гамильтонов циклы в графе.

Замкнутый обход симметричного графа по всем вершинам по одному разу называется **гамильтоновым** циклом. Замкнутый обход симметричного графа по всем ребрам по одному разу называется **Эйлеровым** циклом.

2) Задача Эйлера о семи мостах.Теорема Эйлера о существовании цикла Эйлера в симметричном мультиграфе.

Л.Эйлер занимался следующей задачей поиска в графе пути, который был назван в честь него эйлеровым циклом.

В городе Калининграде протекает река Прегаль, на которой имеются два острова, соединенные семью мостами с берегами реки и друг с другом.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Изображение выглядит как объект, часы  Автоматически созданное описание |

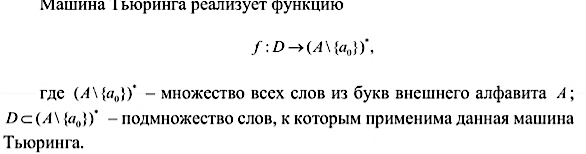
Л.Эйлер, гуляя в этой местности, заинтересовался следующей задачей. Требуется выбрать такой маршрут, чтобы пройти по каждому мосту по одному разу и вернуться на исходное место. Систему мостов здесь можно изобразить в виде мультиграфа (имеются кратные ребра). Мосты это ребра мультиграфа, а вершины – острова и берега.

Задача сводится к отысканию «связного» (непрерывного) обхода мультиграфа по всем ребрам так, чтобы каждое ребро пройти один раз. Эйлер сформулировал и доказал теорему о том, при каких необходимых и достаточных условиях эта задача имеет решение. Для существования эйлерова цикла в мультиграфе необходимо и достаточно, чтобы количество ребер при каждой вершине было четным (степени всех вершин

мультиграфа были четные). В частности, задача Эйлера с семью мостами решения не имеет.

**15**. 1) Машина Тьюринга.

Машина Тьюринга – это автомат, у которого входная и выходная ленты совмещены и, тем самым, входной и выходной алфавит общий.



Машина Тьюринга определяется пятью составляющими:

**1. Лента машины.** Лентой машины называется устройство для записи на ней входной, промежуточной и выходной информации вычислительного процесса. Причем лента бесконечна в обе стороны и разбита на клетки.

**2. Внешний алфавит машины**. Конечное множество символов

A = { } , которые могут помещаться по одному в клетки ленты,

называется ВНЕШНИМ (входным и выходным) алфавитом машины. Символ

– особый. Он означает **пустую клетку**. Символы будем называть

**буквами** алфавита. Будем считать, что на ленте во всех клетках стоят символы , кроме конечной последовательности подряд идущих клеток, где стоят любые буквы. Такая конечная последовательность букв, называется СЛОВОМ в алфавите. Длиной слова называется число букв в слове. Слово, не имеющее ни одной буквы, называется пустым словом. Его длина – 0.

1. **Внутренний алфавит.**

Конечное множество символов

Q = {, R, L, S} называется внутренним алфавитом машины. Символы qназываются символами **состояния машины**. При этом символ означает

**Заключительно** состояние (СТОП), а символ означает **начальное**.

Последние три символа внутреннего алфавита называются символами СДВИГА.

**4. Головка машины**. Головкой машины называется устройство для обработки

символов в клетках ленты. Головка всегда находится напротив одной из клеток ленты. Головка может распознать символ в клетке, заменить имеющийся символ на новый из внешнего алфавита, переместиться на одну клетку вправо или влево, остаться на месте. При этом головка всегда находится в одном из состояний , которое она может менять дискретно на другое состояние.

5. **Программа машины**

2) Программа машины Тьюринга.

Программой машины называется конечный набор **команд** вида ,

где P означает один из символов R, L, S. Левая часть команды до стрелки означает условие, при котором головка выполняет команду. Правая часть команды после

стрелки означает инструкцию головке, что надо сделать.

Пусть головка находится в состоянии перед клеткой с символом .

Головка передает эту информацию управляющему устройству машины, которое

просматривает программу и ищет команду с левой частью . Если такой

команды нет, то машина бездействует. Если таких команд несколько, то

нарушается условие детерминированности алгоритма. Наконец, если такая команда есть, то управляющее устройство передает

команду на головку к исполнению.

3) Таблица программы.

Изображение выглядит как седзи, кроссворд

Автоматически созданное описание

4) Конфигурация машины Тьюринга и протокол тестирования.

Конкретное слово на ленте вместе с конкретным положением головки напротив одной из клеток ленты и конкретным состоянием головки называется **конфигурацией** машины. Конфигурацию машины будем изображать в виде двух строк. В первой строке

изображается слово на ленте без пустых клеток. Во второй строке стоит один символ состояния головки под той буквой слова, которую обозревает головка.

Пример:

**16**. 1) Проблема технического кодирования сообщений в канале связи.

Пусть по информ-oму каналу требуется передавать слова в некотором алфавите A. При этом на входе канала передается слово a на выходе канала принимается искаженное помехами слово c . Требуется по слову c восстановить слово **a**. Основная идея решения этой задачи заключается в следующем. Вместо слова a по каналу передается другое слово b = K(a), которое называется КОДОМ слова a. Код должен

быть таким, чтобы по принятому искаженному коду можно было, как минимум, обнаружить ошибку или, как максимум, исправить ошибку. В связи с этим коды делятся на два класса: 1) КОДЫ с обнаружением ошибок;

2) КОДЫ с исправлением ошибок.

Далее, после коррекции принятого искаженного кода, предполагается его декодирование a = (b). Тем самым по каналу с помехами будет передано сообщение.

Изображение выглядит как объект

Автоматически созданное описание

2) Матричное кодирование.

17. Расстояние Хемминга. Теоремы об обнаруживающем и исправляющем коде. Геометрические иллюстрации обеих теорем. (4,7) – код Хемминга.

